

Фрактальная модель формирования облачных систем с использованием дробных дифференциальных и интегральных операторов

И. Е. Кузнецов, e-mail: vaiumet@mail.ru

С. Л. Кириносков, e-mail: slk_met@mail.ru

Д. Б. Долгих, e-mail: deendolgi@yandex.ru

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия» (г. Воронеж)

***Аннотация.** В работе построена модель формирования облачных систем конвективного происхождения, основанная на использовании техники дробного интегро-дифференцирования, с применением фрактальных свойств и свойств эргодичности атмосферных процессов.*

***Ключевые слова:** авиационная метеорология, конвективная облачность, детерминированный хаос, фракталы, устойчивость систем, дробное интегро-дифференцирование, эргодичность.*

Введение

В настоящее время опасные явления погоды конвективного происхождения продолжают оказывать негативное влияние на эффективность и безопасность полетов авиации. Существующие прогностические способы таких явлений, как кучево-дождевая и мощная кучевая облачность, не всегда в полной мере дают требуемую информацию авиационному потребителю. Это связано с наличием неустранимой в пространстве и во времени метеорологической неопределенности, а также с несовершенством тех или иных прогностических методик применительно к конкретным физико-географическим районам.

Если применить системный подход к рассмотрению полетов авиации, то можно выделить авиационную систему (АС), состоящую из таких элементов, как летчик, воздушное судно, окружающая среда (метеоусловия). Функционирование такой АС представляет собой очень сложный процесс, который должен учитывать и уровень подготовки летчика, и конструктивные особенности воздушного судна, и метеоусловия в целом. Все элементы АС связаны нелинейными соотношениями, что приводит к необходимости использования теории детерминированного хаоса и теории фракталов.

Существующие прогностические конвективные модели и методики ограничены термодинамическими аспектами процессов вертикального смешивания в условиях горизонтально-однородных характеристик. В рамках этих одномерных моделей скорость ветра, крупномасштабная дивергенция и адвективные изменения метеовеличин рассматриваются в качестве входных параметров, имеющих постоянное значение. В то же время взаимодействие между динамическим и термодинамическим полями в рамках этих моделей практически не учитывается. Также в вышеуказанных моделях не учитываются фрактальные свойства и генезис образования облачных систем, а также свойства эрeditarности (т.е. свойства сохранения памяти о предыдущих состояниях) атмосферы в целом [1–3].

Необходимо отметить, что эрeditarность в широком смысле является антонимичным понятием по отношению к понятиям фрактальность и хаотичность. Действительно, траектории хаотической системы не зависят от начального состояния, в то же время, как показывают многочисленные наблюдения, динамические свойства локальных атмосферных образований существенно зависят от своей предыстории [4, 5]. Таким образом, учет свойства эрeditarности, а также его влияния на динамику атмосферных процессов, может быть произведен посредством модернизации классических моделей с помощью предположения о фрактальности.

Значительное количество существующих реальных метеорологических процессов не укладывается в стандартные представления механики сплошной среды и требует привлечения новых сведений о фрактальной природе среды, в которой эти процессы происходят. К схожим процессам относятся, например, диффузия примесей в грунте, распространение тепла в аэрозолях и т.д. Для их модельного описания привлекается модифицированный соответствующим образом закон Фика (Фурье), что требует, в свою очередь, использования математического аппарата дробного интегро-дифференциального исчисления [1–3].

Целью работы является повышение качества прогностической метеорологической информации об опасных явлениях погоды конвективного происхождения на основе построения фрактальной модели формирования облачных систем с использованием дробных дифференциальных и интегральных операторов.

1. Техника дробного интегро-дифференцирования

Существует несколько неэквивалентных подходов к определению дробных интегральных и дифференциальных операторов; наибольшее распространение среди них, однако, получили односторонние

операторы Римана-Лиувилля. Дробные интегралы Римана-Лиувилля порядка α определяются выражениями

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{\alpha-1} d\xi, \quad x > a, \\ (I_{b-}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(\xi)(\xi-x)^{\alpha-1} d\xi, \quad x > b. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее $\Gamma(\alpha)$ – стандартное обозначение для интеграла Эйлера второго рода (гамма-функция). Первый из них называется левосторонним, второй – соответственно, правосторонним. Эти конструкции определены для функций из пространства абсолютно интегрируемых на отрезке $[a, b]$, существуя почти всюду [1–3]. Дробные производные Римана-Лиувилля определяются соотношениями

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{n-\alpha-1} d\xi, \\ (D_{b-}^{\alpha} f)(x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b f(\xi)(\xi-x)^{n-\alpha-1} d\xi, \end{aligned} \quad (2)$$

где $n = [\alpha] + 1$. Представленные конструкции являются аналитическими продолжениями дробных интегралов в область $\alpha < 0$.

Определения дробного интегрирования и дифференцирования легко распространяются со случая конечного отрезка на случай бесконечного промежутка; при этом рассматриваемые функции должны удовлетворять некоторым дополнительным требованиям, связанным с поведением на бесконечности, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились. Дробные интегралы Римана-Лиувилля на всей числовой оси вводятся соотношением типа свертки [1–3]:

$$(I_{\pm}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} f(x \mp \xi) \xi^{\alpha-1} d\xi. \quad (3)$$

Производные дробного порядка вводятся аналогичным образом:

$$(D_{\pm}^{\alpha} f)(x) = \frac{d}{dx^n} (I_{\pm}^{n-\alpha} f)(x). \quad (4)$$

Физический смысл дробного дифференцирования и уравнений, содержащих производные нецелого порядка, зависит от конкретной физической системы и задачи на рассмотрение процессов в ней. Однако

Положения модели для слоя, заполненного облачными образованиями, следующие: приповерхностный слой подразделяются на подоблачный хорошо смешанный слой и неглубокий кучевой слой, в котором импульс и консервативные термодинамические параметры линейно распределены по вертикальной координате.

В ситуации, когда происходит насыщение кучевой среды, приповерхностный слой может быть интерпретирован как слой, ограниченный по вертикали слоисто-кучевой облачностью верхнего яруса. Турбулентные потоки в верхней части тонкого поверхностного слоя параметризуются посредством граничных условий. Все параметризованные потоки в пограничном слое ограничены тонким инверсионным слоем.

В представленной формулировке нижняя часть свободной атмосферы определяет верхнее граничное условие для приповерхностного слоя, соответствующее граничным условиям на импульс, тепловые потоки и влажность. Не зависящая от времени потенциальная температура, влажность, давление и горизонтальная компонента градиента давления фиксируются на «эталонном» уровне выше слоя инверсии. Вертикальные компоненты градиента потенциальной температуры и влажности в свободной атмосфере также полагаются постоянными. Таким образом, условия на верхней границе приповерхностного слоя могут быть относительно легко идентифицированы. Соответствующая горизонтальная компонента градиента давления в верхней части приповерхностного слоя может быть получена с использованием гидростатического соотношения. Эта трактовка свободной атмосферы связана с необходимостью учета фрактальных свойств поля распределенной плотности в приповерхностном слое и, в свою очередь, влияние этой характеристики на горизонтальную компоненту градиента давления [1–3].

Поскольку приповерхностный слой может включать в себя как свободные облачные образования, так и различные атмосферные неоднородности, согласованный набор термодинамических параметров, который является консервативным как в сухих, так и влажных адиабатических процессах выбирается в качестве набора переменных подлежащих идентификации.

Для прогноза содержания влаги в приповерхностном слое общее соотношение смешивания q_w для воды определяется следующим образом:

$$q_w = q \text{ — для ситуации ненасыщенности, } q < q_s, \quad (5)$$

$$q_w = q_s + q \text{ — для насыщения, } q < q_s, \quad (6)$$

где q представляет собой соотношение смешивания для системы пар-вода, q_s является соотношением смешивания в случае насыщения, q_l – соотношение смешивания для системы облако-жидкость.

Эквивалентная потенциальная температура θ_e используется в качестве консервативной переменной, чтобы обеспечить идентификацию суммарной тепловой энергии (явное и скрытое тепло) и потенциальной энергии в приповерхностном слое. Линеаризованная форма θ_e в условиях слабых конвективных движений может быть определена как

$$\theta_e = \theta + \frac{L}{C_p} q, \quad (7)$$

где θ – потенциальная температура, L – удельная теплота парообразования, C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

В простейшем случае прозрачного смешанного слоя, горизонтальные составляющие атмосферных движений u_M, v_M , эквивалентная потенциальная температура $(\theta_e)_M$ и общее соотношение смешивания для воды $(q_w)_M$ принимаются постоянными величинами по вертикальной координате. Скорость нагрева H_R (как длинноволнового, так и коротковолнового) также предполагается постоянной. Ограничение, накладываемое на турбулентные потоки u, v, θ_e, q_w , предполагает их линейное изменение с высотой в приповерхностном слое. Таким образом, уравнения динамики для $u_M, v_M, (\theta_e)_M, (q_w)_M$, а также для глубины смешанного слоя z_I , с учетом фрактальных свойств могут быть записаны в виде [1–3]:

$$D_t^\alpha u + u \frac{\partial u}{\partial x} = fv + \frac{1}{z_I} \int_0^{z_I} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right) dz + \frac{(F_u)_0 - (F_u)_{I-}}{\rho z_I} + K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$$D_t^\alpha v + u \frac{\partial v}{\partial x} = -fu + \frac{1}{z_I} \int_0^{z_I} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}\right) dz + \frac{(F_v)_0 - (F_v)_{I-}}{\rho z_I} + K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (9)$$

$$D_t^\alpha \theta_e + u \frac{\partial \theta_e}{\partial x} = \frac{(F_{\theta_e})_0 - (F_{\theta_e})_{I-}}{\rho z_I} + H_R + K \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial x^2}, \quad (10)$$

$$D_I^\alpha q_w + u \frac{\partial q_w}{\partial x} = \frac{(F_{q_w})_0 - (F_{q_w})_{I-}}{\rho z_I} + K \frac{\partial^2 q_w}{\partial x^2}, \quad (11)$$

$$D_I^\alpha z_I + u \frac{\partial z_I}{\partial x} = (w)_{I-} + (w_e)_I + K \frac{\partial^2 z_I}{\partial x^2}, \quad (12)$$

$$D_I^\alpha z_I + u \frac{\partial z_I}{\partial x} = (w)_{I-} + (w_e)_I + K \frac{\partial^2 z_I}{\partial x^2}. \quad (13)$$

где индексы 0, I, I- отвечают поверхности, слою инверсии и основанию инверсионного слоя соответственно.

Для упрощения записи индекс m в уравнениях (4)-(8) опущен. Кроме того, предполагается, что горизонтальная ось x выбрана в качестве направления, отвечающее преимущественному направлению движения воздушных масс. Также отметим, что временные масштабы рассматриваемых в рамках модели процессов таковы, что преимущественное направление может быть рассмотрено в качестве консервативной характеристики. Параметр f соответствует параметру Кориолиса; ρ – плотность воздуха, а $\bar{\rho}$ является средним значением плотности в смешанном слое. Вертикальный турбулентный поток ($\overline{\rho \phi' w'}$) при любом значении предсказываемой переменной ϕ обозначается F_ϕ . Второе слагаемое в правых частях (11) и (12) – есть проинтегрированная по вертикальной координате горизонтальная компонента градиента давления. Глобальное значение вертикальной компоненты вектора скорости в пространственной области основания инверсионного слоя (получаемое в рамках разрабатываемой модели) $(w)_{I-}$ определяется значением горизонтальной компоненты вариации параметра u_m . Параметр $(w_e)_I$ есть скорость турбулентного захвата в слое инверсии. Диффузионные слагаемые (пропорциональные второй пространственной производной) в каждом из прогностических уравнений введены с целью частичного учета процессов мелкомасштабного смешивания (отметим также, что эти слагаемые отвечают учету процессов вязкого трения в приповерхностном слое). Эти же слагаемые используются для обеспечения вычислительной устойчивости вышеуказанной алгоритмической реализации рассматриваемой системы уравнений.

Поскольку потенциально более теплый и сухой воздух с различными динамическими характеристиками захватывается в смешанном слое, турбулентные потоки в области базы инверсии

связаны как со скоростью захвата $(w_e)_{I-}$, так и со скачком параметра $(\Delta\phi)_{I-} = (\phi_{I+} - \phi_M)$ по всему слою инверсии с помощью соотношения:

$$(F_\phi)_{I-} = -\rho_{I-} (w_e)_{I-} (\Delta\phi)_{I-}, \quad (14)$$

где роль ϕ может играть любая из величин u , v , θ_e или q_w . Нижний индекс $I+$ относится к верхней части слоя инверсии. Для замыкания системы модельных уравнений интенсивность процесса вовлечения должна быть параметризована надлежащим образом.

Фрактальная модель приповерхностного слоя может быть получена как двумерное (x, z) обобщение рассматриваемой выше модели для случая горизонтального переноса идеализированного холодного сухого потока в приповерхностном слое в присутствии температурно-разнородных устойчивых образований.

Горизонтальная составляющая области моделирования имеет протяженность 1600 км: область между $x = -400$ км и $x = 0$ км отвечает земной поверхности, тогда как поверхность моря простирается от $x = 0$ км до $x = 1200$ км. Значение геострофического ветра принимается равным $u_g = 10$ м/с на эталонном уровне (4 км). Температура земной поверхности предполагается равной 273 К, в то время как температура поверхности моря принимается равной 283 К.

Начальные значения потенциальной температуры θ_M во всех точках равны θ_0 – температуре поверхности земли. Начальные и граничные атмосферные условия – параметры фрактальной модели: $\partial\theta/\partial z = 7$ К/км; $\partial q/\partial z = -0,075$ г/(кг.км); $\partial\theta/\partial x = 0$; $\partial q/\partial x = 0$; $u_g = 10$ м/с; $p_R = 616,15$ м; $(\partial p/\partial x)_R = 0$; $\theta_R = 273$ (283) К; $\theta_{I+} = 278$ К; $\theta_M = 271$ К; $z_I = 500$ м; $q_{I+} = 0,6625$ г/кг; $q_M = 2$ г/кг; $\tau_{abj} = 6$ часов; $C_{drag} = 1$; $r/\Delta z = 0,4$; $C_w = 0,3$; $\Delta x = 2$; $\Delta t = 20$ с; $K = 2,5 \cdot 10^5$ м²/с.

Численное интегрирование осуществляется с шагом по времени 20 с. Решение с использованием фрактальной модели демонстрирует асимптотическую устойчивость по времени и сходимость к квазистационарному решению, а представляемые численные результаты для характеристик получены для времени моделирования $T = 55,56$ часов (10000 шагов по времени). Численные результаты, демонстрирующие динамику наблюдаемых параметров θ и q_w представлены на рис. 2.

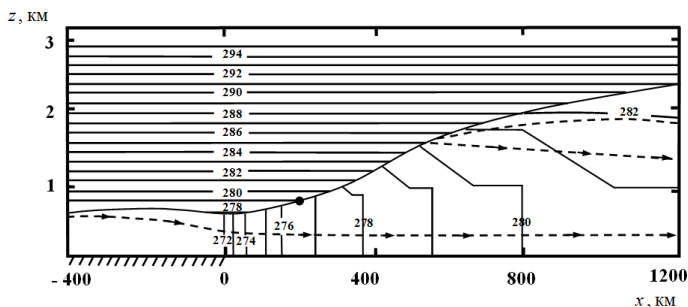


Рис. 2. Вертикальные сечения температурных профилей в нижней части свободной атмосферы, а также моделируемого приповерхностного слоя

Заключение

Таким образом, учет фрактальной структуры кучевых облаков на модельном уровне (с использованием техники дробного интегрирования) позволяет достаточно точно и адекватно описывать генезис облачных структур, и, как следствие – заблаговременно предсказывать опасные явления погоды на мезомасштабном уровне, диагностировать и идентифицировать основные динамические параметры таких структур, а также анализировать их влияние на условия полетов.

Список литературы

1. Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
2. Учайкин, В.В. Метод дробных производных / В.В. Учайкин. – Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. – 512 с.
3. Ляхов, Л.Н. Дробные производные и интегралы и их приложения. Учебно-методическое пособие для вузов / Л.Н. Ляхов, Э.Л. Шишкина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. – 100 с.
4. Mikhailov, V.V. The Meteorological service model of air and space forces using the fractal theory / V.V. Mikhailov, S.L. Kirnosov // Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies, 2016, 9(3). – Pp. 366-375. DOI: 10.17516/1999-494X-2016-9-3-366-375.
5. Михайлов, В.В. Учет фрактальных свойств при функционировании авиационной системы поддержки принятия метеозависимых решений / В.В. Михайлов, М.Е. Семенов, С.Л. Киросов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2015. – № 1. – С. 12-18.